数学I・数学A

I 次の各問に答えよ．

(1) $(x+y)^2-(y+z)^2$ を因数分解せよ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{5}x+2<\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ を解け．

(3) $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}, y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ．

(4) 1 から 100 までの整数のうち，3 または 5 で割り切れるものはいくつあるか．

II n が整数のとき，n^3 が偶数ならば n も偶数であることを，対偶を証明することで示せ．

III 黒球が 6 個，白球が 4 個入っている袋の中から，1 個ずつ 3 回球を取り出す．ただし，球は，その都度，袋の中に戻すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 個の球が同じ色である確率を求めよ．

(2) 2 個が黒球，1 個が白球である確率を求めよ．

IV x の 2 次方程式 $x^2+2ax+4a-3=0$ (a は実数の定数) がただ 1 つの解（重解）をもつような a の値を求めよ．

【解答】　$\boxed{\text{数学}}$

I 次の各問に答えよ．

(1) $(x+y)^2-(y+z)^2$ を因数分解せよ．
$(x+y)^2-(y+z)^2=\{(x+y)+(y+z)\}\{(x+y)-(y+z)\}=(x+2y+z)(x-z)$

(2) 不等式 $\dfrac{1}{5}x+2<\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ を解け．

$$\begin{aligned}3x+30&<5x+20\\-2x&<-10\\x&>5\end{aligned}$$

(3) $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}, y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ．

$$x+y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=4, xy=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{3}}=1$$

なので，

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=4^2-2=14$$

(4) 1 から 100 までの整数のうち，3 または 5 で割り切れるものはいくつあるか．
3 で割り切れる整数は $\dfrac{100}{3}=33$ 個，5 で割り切れる整数は $\dfrac{100}{5}=20$，15 で割り切れる整数は $\dfrac{100}{15}=6$ 個なので，$33+20-6=47$ 個

II n が整数のとき，n^3 が偶数ならば n も偶数であることを，対偶を証明することで示せ．

対偶である「整数 n が偶数でないならば n^3 は偶数でない」を証明する．
整数 n が偶数でない，すなわち，n が奇数のとき，n を $n=2k+1$ (k は整数) と表すことができる．
このとき，$n^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2(4k^3+6k^2+3k)+1$
$4k^3+6k^2+3k$ は整数であるから，n^3 は偶数でない．
したがって，n が整数のとき，n^3 が偶数ならば n も偶数である．

III 黒球が 6 個，白球が 4 個入っている袋の中から，1 個ずつ 3 回球を取り出す．ただし，球は，その都度，袋の中に戻すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 個の球が同じ色である確率を求めよ．

(2) 2 個が黒球，1 個が白球である確率を求めよ．

(1) 黒球が 6 個，白球が 4 個入っている袋の中から，1 個球を取り出す．袋に入っている球の合計は 10 個であるから，うち 6 個である黒球が出る確率は $\frac{6}{10}$，うち 4 個である白球が出る確率は $\frac{4}{10}$ である．
3 試行とも球の色が同じであるのは，黒球が 3 個となる場合と，白球が 3 個となる場合の 2 通り．
3 個とも黒球である確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{27}{125} $$

3 個とも白球である確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{8}{125} $$

黒球 3 個と白球 3 個は同時に起こらない（排反事象）ため，和をとって

$$ \frac{27}{125} + \frac{8}{125} = \frac{35}{125} = \frac{7}{25} $$

(2) 取り出したのは，黒球 2 個，白球 1 個であり，計 3 回の抽出試行を行っている．何回目の試行でどの色の球が抽出されたのかを考慮する必要がある．扱っている球の色は 2 種類であるから，片方の色の球が何回目の試行で抽出されたかが決まれば，他方の色の球が何回目の試行で抽出されたかが決まる．そこで扱いやすい 1 個抽出された白球を中心にして考える．
黒球は 2 回，白球は 1 回抽出された．

$$ \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^1 $$

ただし，この事象は，白球は 3 回の試行のうちどこで抽出されたかで，3 通りのパターン (${}_3\mathrm{C}_1$) があるから，組み合わせを考慮し，

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^1 = \frac{54}{125} $$

IV x の 2 次方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 3 = 0$ (a は実数の定数) がただ 1 つの解（重解）をもつような a の値を求めよ．

2 次方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 3 = 0$ が重解をもつ条件は，$(2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a - 3) = 0$

両辺を 4 で割って整理して，$a^2 - 4a + 3 = 0$

よって，$(a - 1)(a - 3) = 0$

したがって，$a = 1, 3$