

数学I・数学A

I. 次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $x^2 + 4x - 5 = 0$ を解け.

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$
$$\therefore x = -5, 1$$

(2) 999^2 を計算せよ.

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

(3) $\sin 37^\circ$, $\cos 37^\circ$, $\sin 127^\circ$, $\cos 127^\circ$, $\sin 143^\circ$, $\cos 143^\circ$ のうち $\sin 53^\circ$ と等しいものを全て選べ.

θ が鋭角であるとき $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ が成り立つ. 従って $\sin 53^\circ$ と等しいものは $\cos 37^\circ$, $\sin 127^\circ$.

(4) 10進数の147を2進数で表せ.

10010011

II. $a^2 + b^2 = c^2$ をみたす自然数 a, b, c のうち, 少なくとも1つは偶数であることを背理法を用いて示せ.

a, b, c がすべて奇数とすると, a^2, b^2, c^2 もすべて奇数だから, $a^2 + b^2$ は偶数である.

これは, $a^2 + b^2 = c^2$ であることに矛盾する. 以上のことより, a, b, c がすべて奇数ということはない. すなわち, a, b, c のうち少なくとも1つは偶数である.

III. 10本のくじがあり, うち3本は当たりである. このくじを最初にA君が1本引き, 続いてB君が1本引くとする. 次の確率を求めよ. ただし, 一度引いたくじは元に戻さないものとする.

(1) A君は当たるがB君が外れる確率

(2) 2人とも当たる確率

$$(1) \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

$$(2) \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

IV. 28cmの針金を2つに分けて、2つの正方形A,Bを作る. Aの1辺の長さを x cmとすると、次の問いに答えよ.

(1) 正方形Bの周囲の長さを x を用いて表せ.

(2) x のとりうる値の範囲を求めよ.

(3) 正方形A,Bの面積の総和が最小となるには針金を何cmずつに分ければよいか.

(1) Aの周囲の長さは $4x$ となるので、Bの周囲の長さは $28 - 4x$

(2) Bの1辺の長さは $\frac{28 - 4x}{4} = 7 - x$ であり、Aの1辺の長さ x とともに正の数であることから $x > 0$ かつ $7 - x > 0$ でなければならないので、 $0 < x < 7$

(3) Aの面積は x^2 であり、Bの面積は $(7 - x)^2$ であることから、これらの和は $x^2 + (7 - x)^2$ となり、 $x = \frac{7}{2}$ のとき最小となる. このときのAの長さは14cmとなることから、14cmずつにすればよい.