

数学I・数学A

I 次の各問に答えよ.

(1) $(x - y)(x - y - 2) - 3$ を因数分解せよ.

$$x - y = A \text{ とおくと, } (x - y)(x - y - 2) - 3 = A(A - 2) - 3 = A^2 - 2A - 3 = (A - 3)(A + 1) = (x - y - 3)(x - y + 1)$$

(2) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$ を簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2}$$

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする. $\sin \theta = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos \theta, \tan \theta$ の値を求めよ.

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ より, } \cos \theta > 0 \text{ となる. } \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(4) 10進数の57を2進数で表せ.

111001

II 命題: 「 $a^2 + b^2 \geq 7$ ならば $|a + b| > 2$ または $|a - b| > 3$ 」を対偶を用いて証明せよ.

この命題の対偶は, $|a + b| \leq 2$ かつ $|a - b| \leq 3$ ならば $a^2 + b^2 < 7$ である.

$|a + b| \leq 2$ かつ $|a - b| \leq 3$ なので, $(a + b)^2 \leq 4$ かつ $(a - b)^2 \leq 9$ であるから,

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 13. \text{ よって, } a^2 + b^2 \leq \frac{13}{2} < 7$$

ゆえに対偶の命題が真であるので, もとの命題も真となる.

III 2次関数 $C: y = -x^2 + 2x + 3$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) C の頂点の座標を求めよ.

(2) C と x 軸との交点の座標を求めよ.

(3) C の頂点および x 軸との交点を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(1) $y = -(x - 1)^2 + 4$ より, 頂点の座標は $(1, 4)$.

- (2) $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x - 3)(x + 1)$ となる. $y = 0$ なのでこれを解いて, $x = 3, -1$. よって交点の座標は $(3, 0), (-1, 0)$
- (3) 底辺 4, 高さ 4 の三角形となるので面積は 8.

IV x 軸上を動く点 P がある. 硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけ進み, 裏が出たら負の方向に 1 だけ進む. 硬貨を 6 回投げたとき, 次の確率を求めよ.

- (1) 点 P が原点に戻る確率
- (2) 点 P が 4 回目に原点に戻り, かつ 6 回目に原点に戻る確率

- (1) 硬貨を 6 回投げて表が r 回出るとすると, 点 P の x 座標は $1 \times r + (-1) \times (6 - r) = 2r - 6$ で表される. 最終的に原点に戻るためには $2r - 6 = 0$ となるから $r = 3$. したがって表が 3 回, 裏が 3 回出ることになる.

$$\text{この場合の確率は } {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}.$$

- (2) 点 P が 4 回目と 6 回目に原点に戻るには, 最初の 4 回で表が 2 回, 裏が 2 回でて, かつ残りの 2 回で表が 1 回, 裏が 1 回出る必要がある.

$$\text{この場合の確率は } {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{2^4} \times \frac{2}{2^2} = \frac{3}{16}.$$