

数学I・数学A

I 次の各問に答えよ.

(1) $x^3 - 64$ を因数分解せよ.

$$x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

(2) 2つの不等式 $2x + 3 > x + 2$ および $x + 1 > 2x + 1$ を同時に満たす x の範囲を求めよ.

それぞれ解いて $x > -1, x < 0$ であるから, $-1 < x < 0$

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $2 \sin \theta = \sqrt{2}$ を満たす θ の値を求めよ.

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ$$

(4) a, b を整数とする. a を5で割ると2余り, b を5で割ると4余る. ab を5で割ったときの余りを求めよ.

k, l を整数とすれば, $a = 5k + 2, b = 5l + 4$ と表される.

$ab = (5k + 2)(5l + 4) = 25kl + 20k + 10l + 8 = 5(5kl + 2l + 4k + 1) + 3$ となるので, 余りは3.

II 命題: 「 n は整数とする. n^2 が7の倍数ならば n は7の倍数である」が真であることを用いて $\sqrt{7}$ が無理数であることを証明せよ.

$\sqrt{7}$ が無理数でないと仮定すると, 互いに素な自然数 a, b を用いて $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ と表される.

$a = \sqrt{7}b$ であるから, $a^2 = 7b^2$ となる. このとき a^2 は7の倍数となり, a も7の倍数となるので, $a = 7k$ (k は自然数) と表される.

したがって $49k^2 = 7b^2$ から $b^2 = 7k^2$ となる. このとき b^2 は7の倍数となり, b も7の倍数となる. a, b ともに7の倍数となり, a, b が互いに素な自然数であることに矛盾する. したがって $\sqrt{7}$ は無理数となる.

III 3点 $(0, 2), (1, 7), (-1, 3)$ を通る放物線 C がある. 次の問いに答えよ.

(1) C の方程式を求めよ.

(2) C と原点について対称なグラフの方程式 C' を求めよ.

(3) C' の頂点の座標を求めよ.

- (1) $y = ax^2 + bx + c$ として、3点の座標を代入すると、 $c = 2, a + b + c = 7, a - b + c = 3$ となる。これを解いて $a = 3, b = 2, c = 2$ となるので、 $y = 3x^2 + 2x + 2$
- (2) 原点について対称なので、 $x = -x, y = -y$ と置き換えると、 $-y = 3(-x)^2 + 2(-x) + 2 = 3x^2 - 2x + 2$ となる。したがって、 $y = -3x^2 + 2x - 2$.
- (3) $y = -3x^2 + 2x - 2 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 2 = -3\left\{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right\} - 2 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}$
よって頂点の座標は $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

IV 異なる6枚のカードがある。次の問いに答えよ。

- (1) これらのカードをすべて1列に並べる方法は何通りあるか。
 (2) これらのカードから3枚を取り出して1列に並べる方法は何通りあるか。
 (3) これらのカードを3枚、2枚、1枚に分ける方法は何通りあるか。

- (1) $6! = 720$
 (2) ${}_6P_3 = 120$
 (3) ${}_6C_3 \times {}_3C_2 = 20 \times 3 = 60$